**Аффиная эквивалентность фигур.**

**Определение 1.** Фигуры  и  в аффинном пространстве называются аффинно эквивалентными, если  такое, что .

Заметим, что введенное отношение на множестве является отношением эквивалентности.

**Аффинная эквивалентность плоскостей.**

Пусть  и  ‑ две плоскости в , где  и  ‑ размерности их направляющих подпространств.

**Упражнение 5.**  тогда и только тогда, когда их направляющие пространства совпадают и содержат вектор  (вектор-мостик).

***Подсказка:*** *см. взаимное расположение плоскостей****.***

**Теорема 1.** Плоскости и  лежат в одной орбите (то есть  такое, что ) тогда и только тогда, когда .

**Доказательство.** Пусть  и  лежат в одной орбите. Это значит, что существует аффинное преобразование  такое, что . Тогда (см. упражнение 5) имеем . Так как  ‑ автоморфизм векторного пространства, то , то есть размерность направляющего пространства плоскости является инвариантом аффинных преобразований (сохраняется при аффинных преобразованиях).

Наоборот: пусть . Дополняем базисы направляющих пространств  и  до базисов  и  всего пространства . Заметим, что первые  векторов этих базисов принадлежат  и  соответственно. Тогда для реперов  и  существует единственное аффинное преобразование , переводящее  в . При этом

**Определение 2.** Размерность направляющего пространства плоскости будем называть размерностью плоскости.

**Теорема 1’**(переформулировка теоремы 1)**.** Размерность плоскости является инвариантом, выделяющим орбиты.

***Аффинная классификация пар плоскостей.***

Пусть  ‑ множество упорядоченных пар плоскостей. Для двух пар  и  из  необходимым условием их аффинной эквивалентности является совпадение размерностей соответствующих плоскостей:

.

Кроме , необходимым условием эквивалентности является совпадение размерностей пересечений направляющих пространств:



И, конечно же, необходимо, чтобы

.

**Определение 3.** Пусть  ‑ пара плоскостей из . Четверку чисел

,

где  ‑ размерность первой плоскости в паре плоскостей,  ‑ размерность второй плоскости,  ‑ размерность пересечения направляющих пространств,  ‑ размерность аффинной оболочки , будем называть *характеристикой пары* .

Как уже было замечено, пары, имеющие разные характеристики, не могут быть аффинно эквивалентными. Более того, верна

**Теорема 2.** Две пары плоскостей и  аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда их характеристики совпадают.

**Доказательство.** Достаточно показать, что из равенства характеристик пар  и  следует их аффинная эквивалентность. Пусть , и для определенности будем считать, что , то есть плоскости в обеих парах не пересекаются.

Рассмотрим два репера



и

,

где

 (соответственно ) ‑ базис пересечения  (соответственно ),

 (соответственно ) – базис  (соответсвенно ),

 (соответственно  ‑ базис  (соответственно ),

 (соответственно ) ‑ векторы, дополняющие линейно независимую систему  (соответственно  до базиса всего пространства.

Существует единственное преобразование , переводящее первый репер во второй. При этом

,

.

Кроме того, для  базис  линейной частью  переводится в базис , следовательно , что и завершает доказательство для рассматриваемого случая.

**Упражнение 1.**

* Доказать, что система векторов  линейно независима.
* Провести доказательство теоремы для случая .

**Заметим, что при аффинных преобразованиях характер взаимного расположения плоскостей сохраняется.**